TD n°2 bis : Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 1.

Soient $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$. Soit $c \in I$.

1. Soit $F = \{f \in E \,|\, f(c) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $H = \{f \in E \,|\, f(c) = 1\}$. Est-ce que H est un sous-espace vectoriel de E ?
3. Soit $K = \{f \in E \,|\, f(c) \geq 0\}$. Est-ce que K est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 2.

Donner des exemples d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. On pourra donner leur matrice.

Exercice 3.

Soient $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (5, -2, 2), v_3 = (-1, 1, 2)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_v = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbf{R}^3$ et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_v$ puis celle de $\mathcal{B}_v$ à la base canonique.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}_v$. Calculer B^n pour tout $n > 0$ puis A^n.

Exercice 4.

Déterminer la dimension du noyau et de l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On munit E de la base canonique. On considère $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = e_2 + e_1 - 3e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_2$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) forment une base $\mathcal{B}$.
2. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

où $t \in \mathbb{R}$. Calculer la matrice de u dans la base canonique de E.

Exercice 6.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Chercher le noyau et l'image de u. Calculer la matrice de u^2 dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $u^2 - 3u = 0$.

Exercice 7.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i - 3j + 5k)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer M^2 et M^3.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2)$.
5. Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$ et en déduire que $I - M$ est inversible. Préciser $(I - M)^{-1}$.